ریاضیات (کاربردی ـ عددی)

۱ ـ شرط پایداری روش صریح برای حل معادله $\frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲} ۲+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}=\frac{\partial u}{\partial t}$ چیست؟ $(\Delta x = \Delta y = \Delta z)$

۱) $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^۲} \le \frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^۲} \le \frac{۱}{۸}$
۳) $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^۲} \le \frac{۱}{۶}$
۴) $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^۲} \le \frac{۱}{۲}$

۲ ـ اگر برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۰ & d & e \\ ۰ & ۰ & f \end{bmatrix}$ دترمینان برابر $|A|$ باشد، برای ماتریس $B=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ b & d & ۰ \\ c & e & f \end{bmatrix}$ دترمینان، کدام است؟

۱) $-|A|$
۲) صفر
۳) $|A|$
۴) $\frac{۱}{|A|}$

۳ ـ اگر بخواهیم معادله $\frac{\partial^۲ T}{\partial x^۲}=\frac{۱}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$ را به روش ضمنی (implicit) با فرض $۱=\frac{\alpha \Delta T}{(\Delta x)^۲}$ حل کنیم، کدام معادله حاصل می‌شود؟

۱) $T_{i-۱,n+۱}+۳T_{i,n+۱}+T_{i+۱,n+۱}=T_{i,n}$
۲) $-T_{i-۱,n+۱}+۲T_{i,n+۱}-T_{i+۱,n+۱}=T_{i,n}$
۳) $T_{i-۱,n+۱}-۳T_{i,n+۱}+T_{i+۱,n+۱}=T_{i,n}$
۴) $-T_{i-۱,n+۱}+۳T_{i,n+۱}-T_{i+۱,n+۱}=T_{i,n}$

۴ ـ اگر معادله دیفرانسیل $\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}(r^۲\frac{\partial u}{\partial r})=a$ را به روش تفاضل‌های محدود بنویسیم، کدام شکل قابل قبول است؟

۱) $u_{i-۱}(۱-\frac{h}{r_i})+u_{i+۱}(۱+\frac{h}{r_i})-۲u_i=ah^۲$
۲) $u_{i-۱}(۱+\frac{h}{r_i})+u_{i+۱}(۱+\frac{h}{r_i})+۲u_i=ah^۲$
۳) $u_{i-۱}(۲-h^۲)+u_{i+۱}(۲+h^۲)-۲u_i=ah^۲$
۴) $u_{i-۱}(۱-\frac{h}{r_i}-\frac{h}{r_i^۲})+u_{i+۱}(۱+\frac{h}{r_i}+\frac{h}{r_i^۲})-۲u_i=ah^۲$

۵ ـ معادله $y' = x^{۲} + y$ با شرط اولیه $y(۰) = ۲$ و با استفاده از روش رانگ ـ کاتا مرتبه ۳ و اندازه گام $h = ۰/۱$ حل شده است. محدوده خطای محلی چقدر است؟

۱) $\pm ۰/۰۰۱$ ۲) $\pm ۰/۰۰۰۱$ ۳) $\pm ۰/۰۰۰۰۱$ ۴) $\pm ۰/۰۱$

۶ ـ با توجه به مرتبه خطای روش ذوزنقه، این روش برای چند جمله‌ای .... و کمتر بدون خطا بوده و هر قدر h کاهش یابد، دقت محاسبات ....

۱) درجه دو ـ همواره افزایش می‌یابد
۲) درجه سه ـ تا یک جایی افزایش و سپس کاهش می‌یابد
۳) در جه یک ـ تا یک جایی افزایش و سپس کاهش می‌یابد
۴) درجه یک ـ همواره افزایش می‌یابد

۷ ـ در روش ضمنی (Implicit Method) برای حل معادلات دیفرانسیل، با به کار بردن معادله تفاضلی در حالت n بعدی به ماتریس چند قطری می‌رسیم؟

۱) $n + ۱$ ۲) $۲n - ۱$ ۳) $۲n + ۱$ ۴) $n - ۱$

۸ ـ اگر برای حل معادله $\dfrac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ از روش تفاضل محدود صریح (تفاضل پیشرو در t و تفاضل مرکزی در x) استفاده کنیم، با فرض این که $\Delta x = ۲\Delta t = ۱$ فرم محاسباتی به چه شکلی درمی‌آید؟

۱) $u_i^{n+۱} = u_{i+۱}^n + u_{i-۱}^n + ۲u_i^n$
۲) $u_i^{n+۱} = \dfrac{۱}{۲}(u_{i+۱}^n - u_{i-۱}^n) + u_i^n$
۳) $u_i^{n+۱} = \dfrac{۱}{۲}(u_{i+۱}^n + u_{i-۱}^n) - ۲u_i^n$
۴) $u_i^{n+۱} = \dfrac{۱}{۲}(u_{i+۱}^n + u_{i-۱}^n)$

۹ ـ مقادیر ویژه ماتریس A در چه فاصله‌ای قرار دارند؟

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۴ & ۵ \\ ۳ & ۲ & ۲ & -۶ \\ -۴ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & -۶ & ۴ & ۴ \end{bmatrix}$$

۱) $D = [۱, ۶]$ ۲) $D = [-۱۱, ۱۹]$ ۳) $D = [۱۳, ۱۹]$ ۴) $D = [-۶, ۵]$

۱۰ ـ برای بدست آوردن مقدار تقریبی $\int_{۰}^{۱} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ کدام روش را می‌توان به کار برد؟

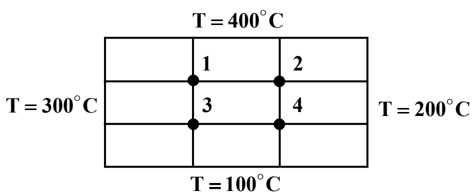
۱) ذوزنقه‌ای ۲) نقطه میانی ۳) سیمپسون ۴) رامبرگ

۱۱ ـ حاصل انتگرال $\int_{۱}^{۷} f(x) dx$ با استفاده از روش سیمپسون معمولی با طول گام واحد چقدر است؟

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
f(x)	۳	−۲	−۴	۲	۵	۶	−۳

۱) ۹ ۲) $\dfrac{۲۲}{۳}$ ۳) $\dfrac{۲۶}{۳}$ ۴) ۸

۱۲ ـ در انتقال حرارت دو بعدی در سیستم زیر، رابطه دمایی برای نقطه ۳ به چه صورت است؟ $(\Delta y = ۲\Delta x)$



۱) $T_{۴} + ۴T_{۱} - ۱۰T_{۳} + ۷۰۰ = ۰$
۲) $T_{۴} + ۴T_{۱} - ۱۰T_{۳} - ۷۰۰ = ۰$
۳) $T_{۱} + ۴T_{۳} - ۱۰T_{۳} - ۱۳۰۰ = ۰$
۴) $T_{۱} + ۴T_{۴} - ۱۰T_{۳} + ۱۳۰۰ = ۰$

۱۳ ــ **کدام گزینه شرط همگرایی روش گاوس ــ سایدل را نشان می‌دهد؟**

۱) $\sum_{\substack{i=1 \\ j\neq 1}}^{n}|a_{ij}| < |a_{ii}|$ ۲) $\sum_{\substack{i=1 \\ j\neq 1}}^{n}|a_{ii}| < \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq 1}}^{n}|a_{ij}|$ ۳) $\sum_{\substack{i=1 \\ j\neq 1}}^{n}|a_{ij}| < 1$ ۴) $\sum_{i=1}^{n}|a_{ii}| < 1$

۱۴ ــ **کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح می‌باشد؟**

۱) حل به روش تیراندازی به یک چند معادله و چند مجهول خواهد رسید.

۲) در روش تیراندازی و روش تفاضل محدود مقدار تابع در یک نقطه معلوم می‌باشد.

۳) روش تیراندازی بر مبنای روش حدس و خط بوده و به حل یک معادله IVP منجر می‌شود.

۴) دقت حل در هر دو روش تیراندازی و روش تفاضل محدود یکسان است.

۱۵ ــ **جدول زیر تابع $f(x,y)$ را برای نقاط مختلف y و x نشان می‌دهد. حاصل انتگرال $\int_{y=2}^{6}\int_{x=1}^{3} f(x,y)\,dx\,dy$ به روش ذوزنقه‌ای چقدر است؟**

y \ x	۱	۲	۳
۲	۱	۱/۵	۲
۴	۲	۲/۵	۳
۶	۳	۳/۵	۴

۱) ۱۰

۲) ۱۵

۳) ۲۰

۴) ۲۵

۱۶ ــ **کدام یک از روابط بازگشتی زیر جهت حل معادله دیفرانسیل $y' = ye^{x}$ به روش اولر بهبود یافته صحیح می‌باشد؟**

۱) $y_{i+1} = y_i + h\,y_i\,e^{2x_i}$

۲) $y_{i+1} = y_i + \frac{h\,y_i}{2}[e^{x_i} + e^{x_{i+1}} + he^{x_i + x_{i+1}}]$

۳) $y_{i+1} = y_i + \frac{h\,y_i}{2}[e^{x_i} + he^{2x_i+1}]$

۴) $y_{i+1} = y_i + \frac{h\,y_i}{2}[2e^{x_i} + he^{2x_i}]$

۱۷ ــ **در صورتی که ۶ و ۱ دو مقدار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه a و b به ترتیب چه مقداری دارند؟**

۱) ۴ و ۳− ۲) ۵ و ۲ ۳) ۴ و ۳ ۴) ۱ و ۶

۱۸ ــ **اگر برای تابع $y(x)$ داشته باشیم $y(0)=22$ و $\frac{dy}{dx} = 2x + y$ و برای محاسبه $y(0/1)$ از چهار جمله اول بسط تیلور استفاده شود، با طول گام $h = 0/1$ مقدار $y(0/1)$ کدام است؟**

۱) ۲۴/۳۲۴۱ ۲) ۲۴/۲۲۴۱ ۳) ۲۳/۳۲۴۱ ۴) ۲۳/۲۲۴۱

۱۹ ــ **هرگاه $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، A^4 کدام است؟**

۱) $\begin{bmatrix} 81 & 1 \\ 16 & 1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 0 & 30 \\ 30 & 0 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 33 & 19 \\ 52 & 11 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 33 & 11 \\ 22 & 11 \end{bmatrix}$

۲۰ ــ **در مقایسه روش‌های صریح و ضمنی برای حل معادلات دیفرانسیل ناپایدار کدام عبارت صحیح است؟**

۱) حل به روش ضمنی منجر به حل دستگاه معادلات که باید همزمان حل شوند، خواهد شد.

۲) روش صریح بر مبنای حدس و خطا می‌باشد.

۳) روش ضمنی دارای محدوده پایداری کمتری نسبت به روش صریح می‌باشد.

۴) روش ضمنی دارای خطای بیشتری نسبت به روش صریح می‌باشد.

ریاضیات (کاربردی ـ عددی)

۱ ـ گزینه «۲»

$$\left(\frac{u^{n}_{i+1,j,k}-2u^{n}_{i,j,k}+u^{n}_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^{2}}\right)+\left(\frac{u^{n}_{i,j+1,k}-2u^{n}_{i,j,k}+u^{n}_{i,j-1,k}}{(\Delta y)^{2}}\right)+2\left(\frac{u^{n}_{i,j,k+1}-2u^{n}_{i,j,k}+u^{n}_{i,j,k-1}}{(\Delta z)^{2}}\right)=\left(\frac{u^{n+1}_{i,j,k}-u^{n}_{i,j,k}}{\Delta t}\right)$$

$$\xrightarrow{\Delta x=\Delta y=\Delta z,\ \frac{\Delta t}{(\Delta x)^{2}}=\lambda}$$

$$u^{n+1}_{i,j,k}=\lambda[u^{n}_{i+1,j,k}+u^{n}_{i-1,j,k}+u^{n}_{i,j+1,k}+u^{n}_{i,j-1,k}+2u^{n}_{i,j,k+1}+2u^{n}_{i,j,k-1}]+(1-8\lambda)u^{n}_{i,j,k}\quad 1-8\lambda\geq 0\Rightarrow\lambda=\frac{\Delta t}{(\Delta x)^{2}}\leq\frac{1}{8}$$

❋ نحوه‌ی به دست آوردن شرط پایداری روش صریح برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (پاره‌ای) بسیار مهم است.

۲ ـ گزینه «۳»

دترمینان یک ماتریس قطری یا مثلثی (بالا مثلثی ـ پایین مثلثی) برابر است با حاصلضرب اعضای روی قطر اصلی.

$$\left.\begin{array}{l}|A|=a\,df\\|B|=a\,df\end{array}\right\}\Rightarrow |A|=|B|$$

۳ ـ گزینه «۴»

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{T_{i,n+۱}-T_{i,n}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^۲ T}{\partial x^۲}=\frac{T_{i+۱,n+۱}-۲T_{i,n+۱}+T_{i-۱,n-۱}}{(\Delta x)^۲}$$

با جایگزینی در معادله $\frac{\partial^۲ T}{\partial x^۲}=\frac{۱}{\alpha}\frac{\partial t}{\partial t}$ و با فرض $\lambda=\frac{\alpha\Delta T}{(\Delta x)^۲}$ خواهیم داشت:

$$-\lambda T_{i-۱,n+۱}+(۱+۲\lambda)T_{i,n+۱}-\lambda T_{i+۱,n+۱}=T_{i,n}$$

$$\lambda=۱ \Rightarrow -T_{i-۱,n+۱}+۳T_{i,n+۱}-T_{i+۱,n+۱}=T_{i,n}$$

۴ ـ گزینه «۱»

$$\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}(r^۲\frac{\partial u}{\partial r})=a \Rightarrow r^۲\frac{\partial^۲ u}{\partial r^۲}+۲r\frac{\partial u}{\partial r}-r^۲ a=\circ$$

$$۲(\frac{u_{i+۱}-u_{i-۱}}{۲h})+r_i(\frac{u_{i+۱}-۲u_i+u_{i-۱}}{h^۲})-r_i a=\circ$$

$$h(u_{i+۱}-u_{i-۱})+r_i(u_{i+۱}-۲u_i+u_{i-۱})-r_i ah^۲=\circ$$

$$u_{i-۱}(r_i-h)+u_{i+۱}(r_i+h)-۲u_i r_i=r_i ah^۲$$

$$u_{i-۱}(۱-\frac{h}{r_i})+u_{i+۱}(۱+\frac{h}{r_i})-۲u_i=ah^۲$$

* در روش به تفاضل محدود نحوه به دست آوردن شکل عددی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بسیار مهم است.

۵ ـ گزینه «۲»

۱ـ در روش رانگ کاتای مرتبه سوم ابتدا سه مقدار کمکی $k_۳, k_۲, k_۱$ محاسبه شده و سپس مقدار $y_{i+۱}$ به کمک آن‌ها تعیین می شود.

$$k_۱=hf(x_i,y_i) \quad k_۲=hf(x_i+\frac{h}{۲},y_i+\frac{k_۱}{۲}) \quad k_۳=hf(x_i+h,y_i+۲k_۲-k_۱)$$

$$\Rightarrow y_{i+۱}=y_i+\frac{۱}{۶}(k_۱+۴k_۲+k_۳)$$

۲ـ خطای محلی رانگ کاتای مرتبه سوم عبارت است از: $\text{Error}\approx o(h^۴)$

در این مسأله $\text{Error}=(\circ/۱)^۴=۱\circ^{-۴}=\pm\circ/\circ\circ\circ۱$

* روش‌های عددی حل عددی معادلات دیفرانسیل مقدار اولیه (IVP) مثل روش اولر، تیلور و انواع رانگ کاتاها بسیار مهم است.

۶ ـ گزینه «۳»

۱ـ انتگرال‌گیری به روش ذوزنقه‌ای دقیق‌تر از روش مستطیلی است و تابع تحت انتگرال را به صورت توابع تکه تکه خطی تقریب می‌زنیم در نتیجه:

$$I=\frac{h}{۲}[f_{\circ}+f_n+۲\Sigma f]$$

۲ـ در روش ذوزنقه هر قدر h کوچک تر باشد، دقت محاسبات افزایش و خطا کاهش می‌یابد ولی از یک مرحله به بعد در اثر خطای گرد کردن دقت محاسبات کاهش پیدا می‌کند.

۳ـ در روش ذوزنقه خطا متناسب با $h^۲$ (یا $\frac{۱}{n^۲}$) است. [h طول گام و n تعداد تقسیمات بازه]

۴ـ با توجه به مرتبه خطای روش ذوزنقه، این روش برای چند جمله‌ای‌های درجه ۱ و کمتر بدون خطا است.

۷ ـ گزینه «۳»

در روش ضمنی با به کار بردن معادله تفاضلی برای نقاط مجهول در مسائل n بعدی به یک ماتریس $۲n+۱$ قطری می‌رسیم به عنوان مثال در حالت ۱ بعدی به یک ماتریس سه قطری، در حالت ۲ بعدی به یک ماتریس پنج قطری و در حالت ۳ بعدی به یک ماتریس هفت قطری می‌رسیم که در هر حالت دستگاه حاصل شده به روش‌های عددی حل می‌گردد.

۸ ـ گزینه «۴»

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}=\frac{\partial u}{\partial t}\Rightarrow\frac{u_{i+۱}^n-۲u_i^n+u_{i-۱}^n}{(\Delta x)^۲}=\frac{u_i^{n+۱}-u_i^n}{\Delta t}$$

$$u_{i+۱}^n-۲u_i^n+u_{i-۱}^n=۲(u_i^{n+۱}-u_i^n)$$

$$u_i^{n+۱}=\frac{۱}{۲}(u_{i+۱}^n-۲u_i^n+u_{i-۱}^n)+u_i^n$$

$$u_i^{n+۱}=\frac{۱}{۲}(u_{i+۱}^n+u_{i-۱}^n)$$

* شکل عددی با توجه به انواع مشتق (تفاضل پیشرو، تفاضل پسرو و تفاضل مرکزی) در روش صریح برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بسیار مهم است.

۹ ـ گزینه «۲»

طبق قضیه Gersch- Gorin برای ماتریس مربع $A=[a_{ij}]$ هرگاه $r=\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}|a_{ij}|$ باشد، آنگاه هر مقدار ویژه ماتریس A در یکی از نامساوی‌های روبه‌رو صدق می‌کند:

$$|\lambda-a_{ii}|\le r_i \qquad i=1,2,\dots,n$$

در این مسأله با استفاده از قضیه گورچ ـ گورین داریم:

$$|\lambda-1|\le(3+4+5)\Rightarrow -12\le\lambda-1\le 12\Rightarrow -11\le\lambda\le 13$$
$$|\lambda-2|\le(3+2+6)\Rightarrow -11\le\lambda-2\le 11\Rightarrow -9\le\lambda\le 13$$
$$|\lambda-3|\le(4+2+4)\Rightarrow -10\le\lambda-3\le 10\Rightarrow -7\le\lambda\le 13$$
$$|\lambda-4|\le(5+6+4)\Rightarrow -15\le\lambda-4\le 15\Rightarrow -11\le\lambda\le 19$$

بنابراین مقادیر ویژه ماتریس A در بازه‌ی $D=[-11,19]$ قرار دارند.

※ استفاده از قصیه گرچ ـ گورین در به دست آوردن مقادیر ویژه ماتریس ها بسیار مهم است.

۱۰ـ گزینه «۲»

۱ـ در روش نقطه میانی مقدار انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ را از رابطه زیر تعیین می‌کنیم:

$$\int_a^b f(x)dx\approx h[f(x_0+\frac{h}{2})+f(x_1+\frac{h}{2})+\dots+f(x_{n-1}+\frac{h}{2})]$$

۲ـ خطای محاسبه انتگرال با این روش عبارت است از:

$$\varepsilon=\frac{-(b-a)h^2}{24}f''(c),c\in[a,b]$$

۳ـ در حالتی که تابع تحت انتگرال در نقاط $x=a$ یا $x=b$ تعریف نشده باشد اغلب از روش نقطه میانی استفاده می‌شود.

در این مسأله تابع تحت انتگرال یعنی $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ در کرانه پایین انتگرال $(x=0)$ تعریف نشده است پس از روش نقطه میانی برای محاسبه انتگرال استفاده نماییم.

۱۱ـ گزینه «۳»

رابطه انتگرال‌گیری عددی به روش سیمپسون معمولی (سیمپسون $\frac{1}{3}$) به صورت زیر است:

$$I=\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)dx=\frac{h}{3}[f_{0_{\text{اولی}}}+f_{2n_{\text{آخری}}}+2\sum f_{\text{زوج}}+4\sum f_{\text{فرد}}]$$

در این مسأله $h=1\Rightarrow I=\frac{1}{3}[3-3+2(-4+5)+4(-2+2+6)]$

$$I=\frac{1}{3}[0+2+24]=\frac{26}{3}$$

※ نکته مهم این است که برای تشخیص زوج و فرد بودن، شمارنده i حتماً از صفر شروع می‌شود.

※ انتگرال‌گیری عددی به هر دو روش سیمپسون $(\frac{1}{3},\frac{3}{8})$ در کنکور بسیار مهم است.

۱۲ ـ گزینه «۴»

$$\frac{\partial^{۲}T}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}T}{\partial y^{۲}}=\circ$$

$$\frac{T_{i+۱,j}-۲T_{i,j}+T_{i-۱,j}}{(\Delta x)^{۲}}+\frac{T_{i,j+۱}-۲T_{i,j}+T_{i,j-۱}}{(\Delta y)^{۲}}=\circ$$

$$\xrightarrow{\Delta y=۲\Delta x}۴T_{i+۱,j}-۸T_{i,j}+۴T_{i-۱,j}+T_{i,j+۱}-۲T_{i,j}+T_{i,j-۱}=\circ$$

$$T_{i,j}=\frac{۱}{۱\circ}[T_{i,j+۱}+T_{i,j-۱}+۴(T_{i+۱,j}+T_{i-۱,j})]$$

$$T_{۳}=\frac{۱}{۱\circ}[۱\circ\circ+T_{۱}+۴(۳\circ\circ+T_{۴})]\Rightarrow ۱\circ T_{۳}=T_{۱}+۴T_{۴}+۱۳\circ\circ\Rightarrow T_{۱}+۴T_{۴}-۱\circ T_{۳}+۱۳\circ\circ=\circ$$

* در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (پاره‌ای) در سیستم‌های دو بعدی به دست آوردن رابطه یا معادله نقطه‌ای برای هر گره به صورت عددی بسیار مهم است.

۱۳ ـ گزینه «۱»

۱ـ شرط همگرایی روش گاوس ـ سایدل این است که درایه روی قطر اصلی از مجموع درایه‌های سطر مربوطه و همچنین از مجموع درایه‌های ستون مربوطه بیشتر باشد.

۲ـ روش گاوس ـ سایدل اصلاح شده روش ژاکوبی است و در اکثر موارد سرعت همگرایی آن بیشتر از روش ژاکوبی است.

۳ـ هرگاه عناصر اعضای غیرقطر در هر ستون یا سطر دارای علامتی مخالف عضو واقع شده در قطر باشند، سرعت همگرایی روش گاوس ـ سایدل بسیار بیشتر از روش ژاکوبی خواهد بود.

۱۴ ـ گزینه «۳»

۱ـ در روش تفاضل محدود به یک چند معادله چند مجهولی می‌رسیم.

۲ـ در روش تیراندازی ابتدا مقدار مشتق حدس زده شده و معادله به معادله IVP تبدیل می‌شود.

۳ـ در هر دو روش تیراندازی و تفاضل محدود به دو مقدار مشخص از تابع نیاز است.

۴ـ به علت تفاوت در روش‌های حل تیراندازی و تفاضل محدود،خطاهای آنها الزاماً برابر نمی‌باشد.

۱۵ـ گزینه «۳»

$$y=۲ \qquad I=\int_{x=۱}^{۳} f(x,y)dx=\frac{۱}{۲}[۱+۲\times ۱/۵+۲]=۳$$

$$y=۴ \qquad I=\int_{x=۱}^{۳} f(x,y)dx=\frac{۱}{۲}[۲+۲\times ۲/۵+۳]=۵$$

$$y=۶ \qquad I=\int_{x=۱}^{۳} f(x,y)dx=\frac{۱}{۲}[۳+۲\times ۳/۵+۴]=۷$$

$$\Rightarrow I_{total}=\int_{y=۲}^{۶} f(x,y)dy=\frac{۲}{۲}[۳+۲\times ۵+۷]=۲۰$$

۱۶ ـ گزینه «۲»

$$y'=ye^{x}$$

$$y_{i+۱}=y_i+\frac{h}{۲}[y'_i+y'_{i+۱}]\to y_{i+۱}=y_i+\frac{h}{۲}[y_ie^{x_i}+y^*_{i+۱}.e^{x_{i+۱}}]$$

(با استفاده از روش اولر) $y^*_{i+۱}=y_i+hy'_i=y_i+h(y_ie^{x_i})$

$$\Rightarrow y_{i+۱}=y_i+\frac{h}{۲}[y_ie^{x_i}+[y_i+h(y_ie^{x_i})]e^{x_{i+۱}}]$$

$$\Rightarrow y_{i+۱}=y_i+\frac{hy_i}{۲}[e^{x_i}+e^{x_{i+۱}}+he^{x_i+x_{i+۱}}]$$

* نحوه به دست آوردن رابطه بازگشتی به روش اولر اصلاح شده و اولر در حل عددی معادلات دیفرانسیل بسیار مهم است.

۱۷ ـ گزینه «۲»

$$|A-\lambda I|=۰ \Rightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & ۴ \\ ۱ & b-\lambda \end{vmatrix}=۰\Rightarrow (a-\lambda)(b-\lambda)-(۴\times ۱)=۰$$

$$\Rightarrow (a-\lambda)(b-\lambda)=۴$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=۱\Rightarrow (a-۱)(b-۱)=\varepsilon \\ \lambda=۶\Rightarrow (a-۶)(b-۶)=\varepsilon\end{array}\right\}\Rightarrow$$

فقط گزینه ۲ در این دو رابطه صدق می‌کند در نتیجه باید $a=۵$ و $b=۲$ شود تا دترمینان برابر ۴ حاصل شود.

$(۵-۱)(۲-۱)=۴$	$(۴-۱)(-۳-۱)=-۱۲$	$(۴-۱)(۳-۱)=۶$	$(۱-۱)(۶-۱)=۰$
$(۵-۶)(۲-۶)=۴$	$(۴-۶)(-۳-۶)=۱۸$	$(۴-۶)(۳-۶)=-۶$	$(۱-۶)(۶-۶)=۰$

۱۸ ـ گزینه «۱»

$$y' = ۲x + y$$
$$y'' = ۲ + y' \Rightarrow y'' = ۲ + ۲x + y$$
$$y''' = y'' \Rightarrow y''' = ۲ + ۲x + y$$
$$y^{(۴)} = y''' \Rightarrow y^{(۴)} = ۲ + ۲x + y$$
$$y(۰) = ۲۲$$
$$y_{i+۱} = y_i + h(۲x + y) + \frac{h^۲}{۲}(۲ + ۲x + y) + \frac{h^۳}{۶}(۲ + ۲x + y) + \frac{h^۴}{۲۴}(۲ + ۲x + y)$$
$$y(۰/۱) = ۲۲ + ۰/۱(۲۲) + ۰/۰۱ \times ۱۲ + ۰/۰۰۱(۴) + ۰/۰۰۰۱(۱)$$
$$y(۰/۱) = ۲۲ + ۲/۲ + ۰/۱۲ + ۰/۰۰۴ + ۰/۰۰۰۱ \Rightarrow y(۰/۱) = ۲۴/۲ + ۰/۱۲۴۱ = ۲۴/۳۲۴۱$$

❋ علی‌رغم نداشتن ماشین حساب دانشجو باید قادر به محاسبه و حل این‌گونه مسائل عددی باشد

۱۹ ـ گزینه «۳»

$$|A - \lambda I| = ۰ \Rightarrow \begin{vmatrix} -۱-\lambda & ۳ \\ ۱ & ۲-\lambda \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow (-۱-\lambda)(۲-\lambda) - (۳ \times ۱) = ۰ \Rightarrow \lambda^۲ - \lambda - ۵ = ۰$$

با استفاده از قضیه کایلی ـ همیلتون $\Rightarrow A^۲ - A - ۵I = ۰ \Rightarrow A^۲ = A + ۵I$

طرفین را در A ضرب می‌کنیم $A^۳ = A^۲ + ۵A \Rightarrow A^۳ = A + ۵I + ۵A \Rightarrow A^۳ = ۶A + ۵I$

طرفین را در A ضرب می‌کنیم $\Rightarrow A^۴ = ۶A^۲ + ۵A \Rightarrow A^۴ = ۶(A + ۵I) + ۵A$

$$\Rightarrow A^۴ = ۱۱A + ۳۰I$$
$$\Rightarrow A^۴ = ۱۱\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} + ۳۰\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۱ & ۳۳ \\ ۱۱ & ۲۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳۰ & ۰ \\ ۰ & ۳۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۹ & ۳۳ \\ ۱۱ & ۵۲ \end{bmatrix}$$

❋ در تعیین توان‌های ماتریس، استفاده از قضیه کایلی ـ همیلتون بسیار کاربردی است.

۲۰ ـ گزینه «۱»

۱ـ در روش صریح مشتقات مکانی را در زمان گذشته (n) در نظر می‌گیریم در این حالت محاسبات ساده‌تر است و هر معادله‌ای که تشکیل می‌شود دارای یک مجهول است و نیازی به حل همزمان دستگاه معادلات نیست ولی محدودیت این روش شرایط پایداری است که ایجاد می‌شود و این کـه حتماً قبل از حل به این روش باید شرط پایداری چک شود. البته یکی از مزایای روش تفاضل محدود صریح این اسـت کـه نـاهمگن بـودن معادلـه دیفرانسیل باعث پیچیدگی حل آن با این روش نمی‌شود.

۲ـ در روش ضمنی مشتقات مکانی را در زمان $n+۱$ که مجهول است در نظر می‌گیریم در این روش دستگاه معادلات حاصل شده باید بـه صـورت همزمان حل شود. این روش بدون قید و شرط پایدار است و نیاز به چک کردن شرط پایداری ندارد.